

გიორგი თუთბერიძე გიორგი ტეფნაძე

მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების სკოლა
მათემატიკის დეპარტამენტი
მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის I

სალექციო კურსი



საქართველოს უნივერსიტეტის
გ ა მ ო მ ც ე მ ლ ო ბ ა

მთარგმნელი ლიანა ყარალაშვილი

რედაქტორი მარინა ჟლენტი

კომპიუტერული უზრუნველყოფა დავით ბარამიძე, ზურაბ გაშაკიძე,
გიორგი თუთბერიძე, გიორგი ტეფნაძე

ყველა უფლება დაცულია. © საქართველოს უნივერსიტეტი, თბილისი 2025

დაუშვებელია წინამდებარე გამოცემის რომელიმე ნაწილის გამოქვეყნება, თარგმნა, ხელახალი პუბლიკაცია ან გადაცემა ნებისმიერი ფორმით თუ საშუალებით, ელექტრონულად (CD-Rom, ინტერნეტი, ა.შ.), მექანიკურად, მათ შორის, ასლის გადაღების, ჩაწერის, ინფორმაციის შენახვის თუ ამოღების ნებისმერი სისტემის მეშვეობით, საქართველოს უნივერსიტეტის გამომცემლობის წინასწარი წერილობითი თანხმობის გარეშე.

წინასიტყვაობა

საღეჭციო კურსი განკუთვნილია ჯანდაცვის ადმინისტრირების სტუდენტებისთვის, რომლის ფარგლებშიც ისინი შეისწავლიან ბიზნესისა და ეკონომიკის ამოცანების გადაჭრის სხვადასხვა მეთოდებს ფუნქციის ზღვრის, უწყვეტობის, წარმოებული და დიფერენციალის გამოყენებით.

საღეჭციო კურსის პირველ ნაწილში გავიხსენებთ ელემენტარულ ფუნქციებსა და მის გრაფიკებს, ასევე შევისწავლით ფუნქციის ზღვარს, უწყვეტობასა და მათ თვისებებს. შევისწავლით ფუნქციის ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ ასიმპტოტებსა და ზღვარს უსასრულობაში, დავადგენთ პოლინომიალური და რაციონალური ფუნქციების თვისებებს უსასრულობაში და ასიმპტოტების მოძებნის ხერხებს. გამოვიყენებთ მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებს და ფუნქციის ზღვრის დახმარებით განვმარტავთ ეილერის რიცხვს, რომელიც თავის მხრივ გამოიყენება უწყვეტი რთული დარიცხვის შესწავლისას, რომელიც მიიღება რთული საპროცენტო განაკვეთის ფორმულაში ზღვარზე გადასვლის შედეგად.

საღეჭციო კურსის მეორე ნაწილში განვიხილავთ ფუნქციის წარმოებულს და მის გამოყენებებს ბიზნესისა და ეკონომიკის ამოცანებში, ასევე შევისწავლით ფუნქციის დიფერენციალს, მის თვისებებსა და გამოყენებებს მარგინალური დანახარჯის მიახლოებითი გამოთვლისთვის და სხვადასხვა პრობლემების განხილვისას. ფუნქციის წარმოებული დახმარებით დავადგენთ ფუნქციის ზრდადობა-კლებადობისა და ამოზნექილობა-ჩაზნექილობის შუალედებს, ასევე შევისწავლით ექსტრემუმისა და გადაღუნვის წერტილების პოვნას, რომლებიც გამოიყენება მაქსიმალური მოგებისა და მოგების ზრდის პერიოდის დასადგენად. წარმოებულების დახმარებით სტუდენტს შეეძლება ფუნქციის გრაფიკის აგება. წარმოებულების გამოყენებით შევისწავლით მოთხოვნის ელასტიკურობის შუალედების დადგენას, რაც თავის მხრივ დაგვეხმარება ამონაგების ზრდადობა-კლებადობის შუალედების მოძებნაში. საღეჭციო კურსის ბოლოს სტუდენტი შეისწავლის ლოპიტალის წესს, რომლის გამოყენებითაც შეძლებს ზოგიერთი რთული ზღვრის გამოთვლას.

სარჩევი

1. ფუნქციები	8
სიმრავლეები	8
მართვითხა კოორდინატთა სისტემა	9
ფუნქციის მოცემის წესები და მისი გრაფიკი	11
ფუნქციათა კომპოზიცია, შექცეული ფუნქცია	12
ზრდადი და კლებადი ფუნქციები	14
შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები	16
ლუწი და კენტი ფუნქციები	17
წრფივი ფუნქციები	18
კვადრატული ფუნქციები	20
ელემენტარული ფუნქციების გრაფიკები და მათი გარდაქმნები	23
წრფივი და კვადრატული ფუნქციის გამოყენება ბიზნესისა და ეკონომიკის ამო- ცანებში	30
თეორიული კითხვები	31
პრაქტიკული ამოცანები	32
გამოყენებები	35
2. ფუნქციის ზღვრის ცნება და უწყვეტობა	37
ზღვრები: გრაფიკული მიდგომა	37
ზღვრები, ალგებრული მიდგომა	39
უწყვეტობა და მისი თვისებები	42
თეორიული კითხვები	49
პრაქტიკული ამოცანები	50
გამოყენებები	56
3. უსასრულო ზღვრები და ზღვრები უსასრულობაში	58
ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები	58
პოლინომიალური ფუნქციები	62
რაციონალური ფუნქცია	64
წილად-წრფივი ფუნქცია	66
თეორიული კითხვები	68
პრაქტიკული ამოცანები	69
გამოყენებები	74
4. ეილერის რიცხვი და უწყვეტი რთული დარიცხვა	75
მაჩვენებლიანი ფუნქცია	75
ლოგარითმული ფუნქცია	76
ეილერის რიცხვი	78

უწყვეტი რთული დარიცხვა	79
თეორიული კითხვები	82
პრაქტიკული ამოცანები	82
გამოყენებები	84
5. წარმოებული	87
ცვლილების სიჩქარე	87
ფუნქციის წარმოებული და მისი გამოთვლის 4-ნაბიჯიანი პროცესი	91
ფუნქციის წარმოებულის ძირითადი თვისებები	96
თეორიული კითხვები	102
პრაქტიკული ამოცანები	102
გამოყენებები	108
6. დიფერენციალი	111
ნაზრდი, დიფერენციალი, აპროქსიმაცია დიფერენციალის გამოყენებით	111
მარგინალური ანალიზი ბიზნესსა და ეკონომიკაში	115
მარგინალური საშუალო დანახარჯი, ამონაგები და მოგება	121
თეორიული კითხვები	122
პრაქტიკული ამოცანები	122
გამოყენებები	125
7. ნამრავლისა და შეფარდების წარმოებული	134
ნამრავლის წარმოებული	134
შეფარდების წარმოებული	135
არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება	137
თეორიული კითხვები	140
პრაქტიკული ამოცანები	141
გამოყენებები	142
8. რთული და არაცხადი ფუნქციის წარმოებულები	145
რთული ფუნქციები	145
რთული ფუნქციის წარმოებული	146
ხარისხოვანი ფუნქციის გაწარმოების ზოგადი წესი	147
მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გაწარმოების ზოგადი წესები	149
არაცხადი ფუნქციის გაწარმოება	151
თეორიული კითხვები	154
პრაქტიკული ამოცანები	154
გამოყენებები	158
10. პირველი რიგის წარმოებული და მათი გამოყენებები, მოთხოვნის ელასტი-	
კურბა	163
კლებადი და ზრდადი ფუნქციები	163
ლოკალური ექსტრემუმები	170
ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე	177
მოთხოვნის ელასტიკურობა	179
თეორიული კითხვები	182
პრაქტიკული ამოცანები	182
გამოყენებები	186

11. მეორე რიგის წარმოებული და გრაფიკები	193
ჩაზნეწილობა–ამოზნეწილობის გამოყენება გრაფიკის აგების დროს	193
12. გრაფიკის აგება ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოყენებით	199
თეორიული კითხვები	203
პრაქტიკული ამოცანები	203
გამოყენებები	211
13. ლოპიტალის წესი	216
შესავალი	216
თეორიული საკითხები	223
სავარჯიშოები	224

1. ფუნქციები

სიმრავლეები

$\mathbb{N}_+$ -ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{N}$ -ით აღვნიშნოთ $\mathbb{N}_+ \cup 0$,

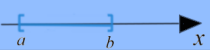
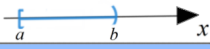
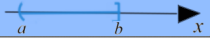
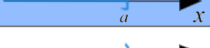
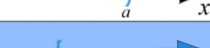
$\mathbb{Z}$ -ით აღვნიშნოთ მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Q}$ -ით აღვნიშნოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{R}$ -ით აღვნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

გავიხსენოთ ინტერვალისა და სეგმენტის, ნახევარინტერვალისა და ნახევარსეგმენტის განმარტებები:

სიმრავლის აღნიშვნები

სიმრავლის აღნიშვნები	უტოლობით აღნიშვნა	წრფეზე წარმოდგენა
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a, b)$	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	$a < x \leq b$	
(a, b)	$a < x < b$	
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	
$(-\infty, a)$	$x < a$	
$[b, \infty)$	$x \geq b$	
(b, ∞)	$x > b$	

ნახ. 1.1

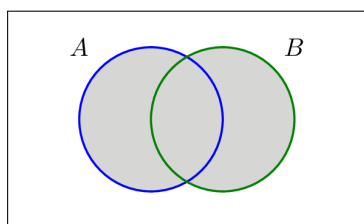
სიმრავლეების აღნიშვნისთვის გამოვიყენებთ ლათინურ ასოებს $A, B, C, \dots$ ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\emptyset$ სიმბოლოთი.

თუ x ელემენტი ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $x \in A$, წინააღმდეგ შემთხვევაში დავწერთ $x \notin A$.

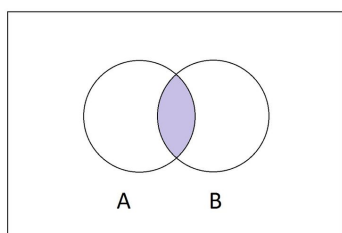
ვიტყვი, რომ A სიმრავლე შედის B -ში ან A არის B -ს ქვესიმრავლე, თუ A -ს ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B -ს, და ჩავწერთ $A \subset B$.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი სასრულ რაოდენობა ელემენტებს შეიცავს და ამ შემთხვევაში სიმრავლის გადმოსაცემად უბრალოდ ჩამოვთვლით მის ყველა ელემენტს.

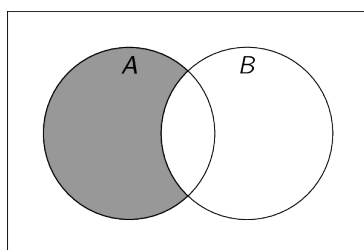
ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი არის ყველა ისეთ დალაგებული წყვილის სიმრავლე, რომლის პირველი ელემენტი პირველი სიმრავლიდანაა, ხოლო მეორე ელემენტი — მეორედან. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.



ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება აღინიშნება $A \cup B$ და ეს არის ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ეკუთვნიან A -ს ან B -ს.



ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა აღინიშნება $A \cap B$ და ეს არის ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ეკუთვნიან A -ს და B -ს ერთდროულად.



ორი A და B სიმრავლის სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$, და ეს არის ისეთი სიმრავლე, რომლის ელემენტები ეკუთვნიან A -ს და არ ეკუთვნიან B -ს ერთდროულად.

ვთქვათ

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4\}, \quad C = \{-4, -2, 0, 6, 10\} \quad \text{და} \quad D = \{4, 6, 8, 10, 12\}.$$

მაშინ ცხადია, რომ $2 \in A$ და $8 \notin A$. ასევე სამართლიანია, რომ $B \subset A$ და $C \not\subset D$. მეორე მხრივ, ადგილი აქვს შემდეგ სიმრავლურ ტოლობებს:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B \cup D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},$$

$$B \cap C = \emptyset, \quad A \cap B = \{2, 4\}, \quad B \cap D = \{4\},$$

$$A \setminus B = \{1, 3\}, \quad B \setminus A = \emptyset, \quad C \setminus D = \{-4, -2, 0\}, \quad D \setminus C = \{4, 8, 12\},$$

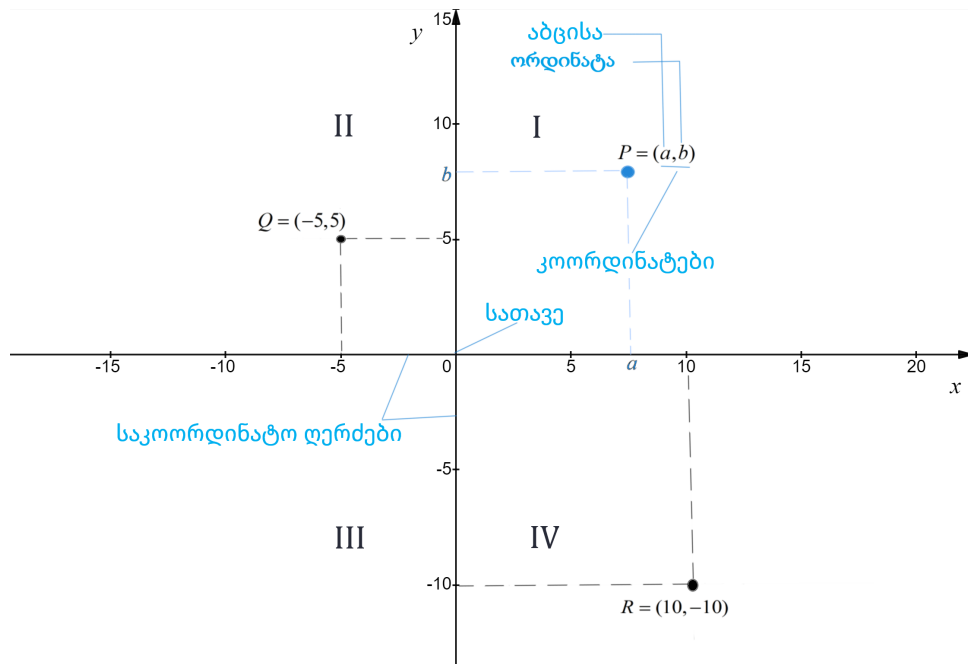
$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}.$$

მართკუთხა კოორდინატა სისტემა

რიცხვითი ღერძის ყოველ წერტილს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი და ყოველ ნამდვილ რიცხვს ერთადერთი წერტილი შეესაბამება რიცხვით ღერძზე. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა რიცხვითი ღერძის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტებს შორის.

მართკუთხა კოორდინატა სისტემის მისაღებად ვირჩევთ ორ ერთმანეთის პერპენდიკულარულ ნამდვილ რიცხვით ღერძს - ჰორიზონტალურსა და ვერტიკალურს, რომლებიც იკვეთებიან მათ სათავეებზე, როგორც მითითებულია ნახაზზე. ჩვეულებრივ,

დადებითი მიმართულებები ზევით და მარჯვნივაა. ჰორიზონტალურ ღერძს ეწოდება აბსცისა ანუ OX -ღერძი, ვერტიკალურ ღერძს - ორდინატა ანუ OY -ღერძი. ორივეს ერთად საკოორდინატო ღერძები ჰქვია. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად ყოფენ, ანუ კვადრანტებად, რომლებიც დანომრილია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით (იხ. ნახაზი 1.1).



ნახ. 1.1: მართკუთხა კოორდინატა სისტემა

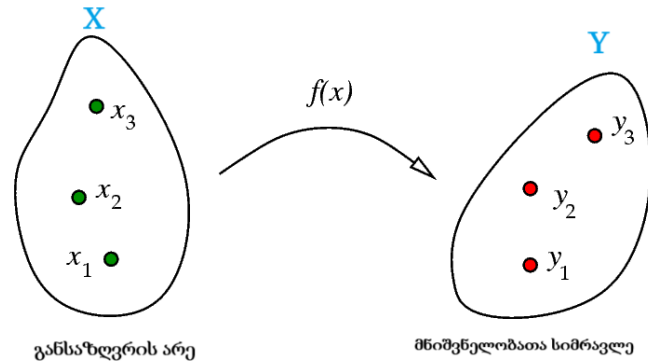
ახლა დავუკავშიროთ კოორდინატები თითოეულ წერტილს სიბრტყეზე. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი P წერტილი სიბრტყეზე. გავავლოთ ამ წერტილზე ჰორიზონტალური და ვერტიკალური წრფეები (იხ. ნახ. 1.1). ვერტიკალური წრფე გადაკვეთს ჰორიზონტალურ ღერძს a კოორდინატის მქონე წერტილში, ხოლო ვერტიკალურ ღერძს $-b$ კოორდინატის მქონე წერტილში. ეს ორი რიცხვი, ჩაწერილი, დალაგებული (a, b) წყვილის სახით წარმოადგენს P წერტილის კოორდინატებს. პირველ კოორდინატს, a -ს, ეწოდება P წერტილის აბსცისა, ხოლო მეორე კოორდინატს, b -ს P წერტილის ორდინატა. ნახაზზე Q წერტილის აბსცისა არის -5 , ხოლო ორდინატა არის 5 . $(0, 0)$ წერტილს კოორდინატა სათავე ეწოდება.

პროცესი, რომელიც ახლა აღვწერეთ, გვიჩვენებს, რომ სიბრტყის ყოველ P წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა ერთადერთი დალაგებული წყვილი (a, b) . უკუპროცესით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ერთადერთი P წერტილი სიბრტყეზე, რომლის აბსცისა და ორდინატა შესაბამისად იქნება a და B . ამრიგად, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სიბრტყის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ წყვილების სიმრავლის ელემენტებს შორის. ამ დებულებას ხშირად ანალიზური გეომეტრიის ფუნდამენტურ თეორემას უწოდებენ.

ცხადია, რომ მართკუთხა კოორდინატა სისტემა წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის დეკარტულ ნამრავლს თავის თავთან.

ფუნქციის მოცემის წესები და მისი გრაფიკი

განმარტება 1.1. ვთქვათ X და Y არა ცარიელი სიმრავლეებია. თუ არსებობს წესი f , რომლის მიხედვით X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის მხოლოდ ერთი y ელემენტი, ვიტყვით, რომ მოცემულია ფუნქცია და ვწერთ $f : X \rightarrow Y$. $y = f(x)$ x -ს დამოუკიდებელ ცვლადს, ანუ არგუმენტს უწოდებენ, y -ს კი დამოკიდებულ ცვლადს, ანუ ანასახს. X სიმრავლეს ეწოდება განსაზღვრის არე, ხოლო Y სიმრავლეს - მნიშვნელობათა არე.



ნახ. 1.2

ნახაზ 1.3-ის 1 და 2 ცხრილები განსაზღვრავს ფუნქციებს, რადგან განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს შეესაბამება მნიშვნელობათა არიდან ზუსტად ერთი მნიშვნელობა. ცხრილი 3 არ განსაზღვრავს ფუნქციას, რადგან განსაზღვრის არის თუნდაც ერთ ელემენტს შეესაბამება ერთზე მეტი ელემენტი მნიშვნელობათა არიდან (მაგალითად, 9-ს შეესაბამება -3 და 3 , ორივე კვადრატული ფესვია 9-დან).

ცხრილი 1

განსაზღვრის არე | მნიშვნელობათა სიმრავლე

რიცხვი	კუბი
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

ცხრილი 2

განსაზღვრის არე | მნიშვნელობათა სიმრავლე

რიცხვი	კვადრეტი
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

ცხრილი 3

განსაზღვრის არე | მნიშვნელობათა სიმრავლე

რიცხვი	კვადრატული ფესვი
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2
9	3
9	-3

ნახ. 1.3

განმარტება 1.2. განტოლებით განსაზღვრული ფუნქცია. თუ ორი ცვლადის განტოლებაში დამოუკიდებელი ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება დამოკიდებული ცვლადის ზუსტად ერთი მნიშვნელობა, მაშინ განტოლება განსაზღვრავს ფუნქციას.

თუ დამოუკიდებელი ცვლადის რაიმე მნიშვნელობისათვის მივიღებთ დამოკიდებულ ცვლადის ერთზე მეტ მნიშვნელობას, მაშინ განტოლება არ განსაზღვრავს ფუნქციას.

განმარტება 1.3. ურთიერთცალსახა ფუნქციები. ფუნქციები, რომლებიც არგუმენტის განსხვავებულ მნიშვნელობებს განსაზღვრის არიდან უთანადებს განსხვავებულ მნიშვნელობებს მნიშვნელობათა არეში, ეწოდებათ ურთიერთცალსახა ფუნქციები.

ცხრილი 1 ურთიერთცალსახა ფუნქციას განსაზღვრავს, რადგან ყოველ განსხვავებულ ელემენტს განსაზღვრის არიდან შეესაბამება განსხვავებული მნიშვნელობა, ცხრილი 2 ფუნქციის მაგალითია, რომელიც არაა ურთიერთცალსახა, რადგან მაგალითად განსაზღვრის არის ორი განსხვავებული ელემენტის -2 -ისა და 1 -ის მნიშვნელობები არის ერთიდაიგივე რიცხვი 4 , ხოლო ცხრილი სამი საერთოდ არ წარმოადგენს ფუნქციას, რადგან მაგალითად, განსაზღვრის არის ელემენტ 1 -ს შეესაბამება ორი მნიშვნელობა 1 და -1 .

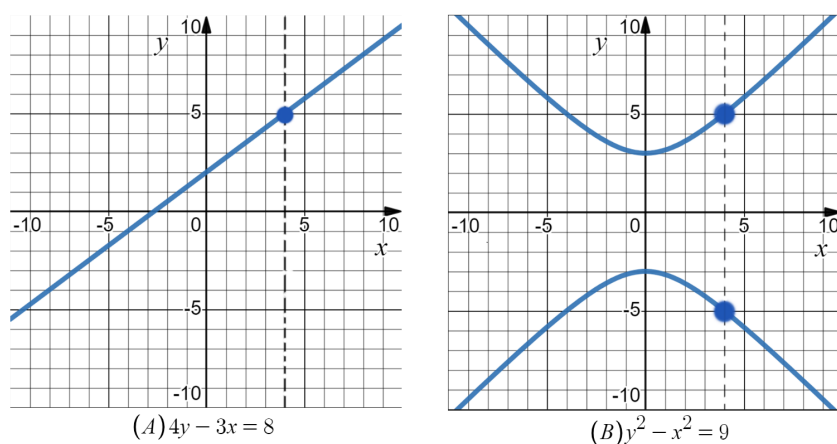
თუ f და g ფუნქციებია, მაშინ ფუნქციათა ჯამი $(f + g)$, სხვაობა $(f - g)$, ნამრავლი $(f \cdot g)$ და განაყოფი $\left(\frac{f}{g}\right)$ განიმარტება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), & (f - g)(x) &= f(x) - g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.\end{aligned}$$

ფუნქციათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და განაყოფის განსაზღვრის არე წარმოადგენს f და g ფუნქციის განსაზღვრის არის თანაკვეთას.

განმარტება 1.4. ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. წყვილების $(x, f(x))$ სიმრავლეს ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება.

თეორემა 1.5. ვერტიკალური წრფის ტესტი ფუნქციისათვის. განტოლება განსაზღვრავს ფუნქციას, თუ საკოორდინატო სისტემაში ყოველი ვერტიკალური წრფე კვეთს განტოლების გრაფიკს არაუმეტეს ერთ წერტილში.



ნახ. 1.4: (A) განტოლებით მოცემული წირი ფუნქციის გრაფიკია, ხოლო (B)-თი კი არა

ფუნქციათა კომპოზიცია, შექცეული ფუნქცია

განმარტება 1.6. ვთქვათ, მოცემულია ორი ფუნქცია f და g . f და g ფუნქციების კომპოზიცია აღინიშნება $f \circ g$ (იკითხება g -ის კომპოზიცია f -თან) და შემდეგნაირად გა-

ნისაზღვრება: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. $f \circ g$ -ს განსაზღვრის არე არის g -ს განსაზღვრის არიდან ყველა იმ x რიცხვების სიმრავლე, რომელთათვის $g(x)$ მოხვდება f -ის განსაზღვრის არეში.

მაგალითი 1.7. ვთქვათ $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x + 3$. მაშინ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + 2(x+3) + 3 = x^2 + 8x + 18,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x + 3) = x^2 + 2x + 3 + 3 = x^2 + 2x + 6.$$

შენიშვნა. საზოგადოდ $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, მაგრამ არსებობს ისეთი ფუნქციათა წყვილები, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

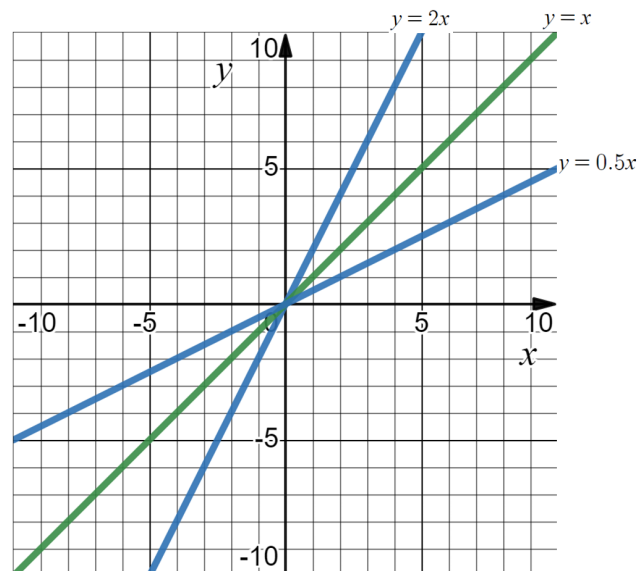
განმარტება 1.8. ვთქვათ $y = f(x)$. განვიხილოთ ახალი ასახვა, რომელიც y ანასახს აბრუნებს x -ში. ასეთ დამოკიდებულებას f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლიდან მისივე განსაზღვრის არეში ეწოდება შექცეული ფუნქცია და f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება (შევნიშნოთ, რომ $f^{-1} \neq 1/f$). განმარტების საფუძველზე $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

მაგალითი 1.9. ვთქვათ $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. მაშინ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) - 2 = x,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{2}{3} = x.$$

შექცეული ფუნქციები სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ. ანუ თუ გადავკეცავთ ამ წრფის მიმართ, შექცეული ფუნქციები ერთმანეთს დაემთხვევა.



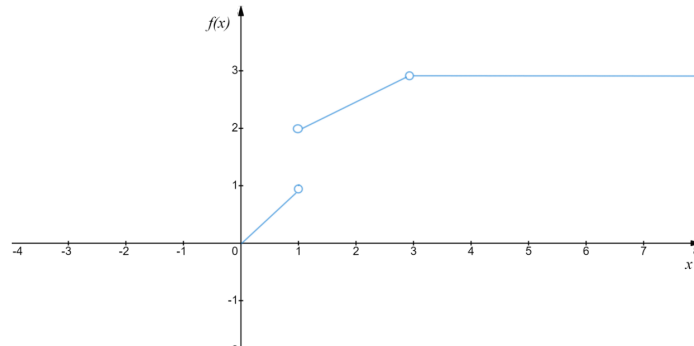
ნახ. 1.5

ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

განმარტება 1.10. ფუნქციას $f : E \rightarrow R$ ეწოდება ზრდადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისთვის $f(x_1) \leq f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$.

მაგალითი 1.11. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{თუ } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & \text{თუ } 1 < x < 3 \\ 3 & \text{თუ } x \geq 3 \end{cases}$$



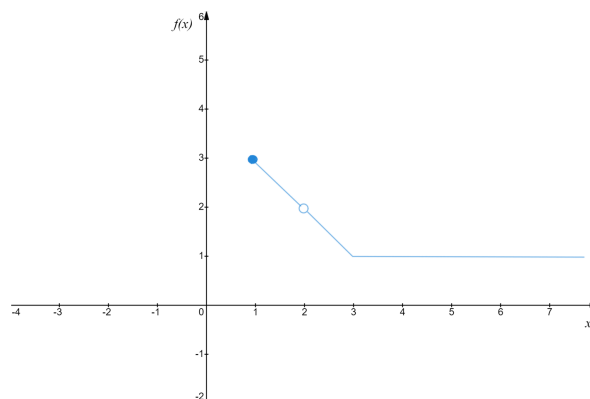
ნახ. 1.6

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფუნქცია ზრდადია თავის განსაზღვრის არეზე.

განმარტება 1.12. ფუნქციას ეწოდება კლებადი E სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისთვის $f(x_1) \geq f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$.

მაგალითი 1.13. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{თუ } 1 \leq x < 2; \\ -x + 4, & \text{თუ } 2 < x < 3; \\ 1, & \text{თუ } x \geq 3. \end{cases}$$



ნახ. 1.7

ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ფუნქცია კლებადია თავის განსაზღვრის არეზე.